*

En alternativ aksiomatisering av egenskapsteorien E;3.

*

Morten Rognes

1988

*

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

§1 Innledning

I Rognes [3] beskrev vi flere forskjellige egenskapsteorier. Imidlertid var det særlig en teori som pekte seg ut som mer naturlig enn de andre. Denne ble betegnet med "E;3". Leseren henvises til Rognes [3] for en nærmere redegjørelse for teorien E;3. Hovedpunktene i det nevnte arbeid vil ikke bli gjentatt her.

Formålet med dette arbeidet er hovedsakelig å presentere en alternativ aksiomatisering av teorien E;3. Dette innebærer at vi her vil presentere en ny teori – den vil bli kalt for E;3* – og antyde hvordan man kan vise at denne teorien i det vesentlige er ekvivalent med E;3.

Det er imidlertid to sidespørsmål som det i noen grad er naturlig å ta opp i denne forbindelse. Det første spørsmålet angår grunnlaget for E;3 og er rett og slett om det er mulig å gi en mer dyptgående begrunnelse for denne teori. Dette spørsmålet vil bli diskutert.

Det andre spørsmålet er om det er nødvendig å innføre begrepet 'mulig verden' som et primitivt begrep, eller om det er mulig å definere dette ved hjelp av andre begreper slik at man fra setninger som det virker rimelig å anta at gjelder for de sistnevnte begreper kan utlede alle de setninger som det er naturlig å tro at gjelder for mulige verdener.

Begge disse spørsmål er av en mer filosofisk karakter. Overlegningene i forbindelse med disse to spørsmål vil derfor ha en viss filosofisk relevans.

§2 Bakgrunn. Utgangspunkt er en spesiell aksiomatisering av utsagnsteorien T1.

Før vi presenterer vår alternative aksiomatisering av E;3 er det hensiktsmessig å minne om definisjonene av en del grunnleggende begreper.

I det følgende betegner "L;e" språket for mengdelære, dvs. det første-ordens språket som i tillegg til de vanlige setningslogiske konstruksjonene, kvantorene og identitetspredikatet kun inneholder konstruksjonen "M(x)", som forkorter uttrykket "x er en mengde", og "xêy" som forkorter "x er et element i mengden y". Disse to predikatene utgjør de eneste ikke-logiske konstruksjonene i språket.

Språket L;e utvides så med de følgende nye ikke-logiske konstruksjoner nemlig:

(1) "x er et utsagn" Dette forkortes med "Ut(x)"
(2) "x er konjunksjonen av utsagnene y og z". Dette uttrykket forkortes med "Kn(x,y,z)"
(3) "x er negasjonen av utsagnet y". I forbindelse med dette uttrykket bruker vi "neg(x,y)" om forkortelse.

Konstruksjonsmengden som inneholder utelukkende konstruksjonene (1) – (3) betegner vi med "D;0". L;e[D;0] er det språket som fremkommer som resultat om L;e utvides med kostruksjonene i D;0 som nye ikke-logiske konstruksjoner. Det bemerkes at språket L;e[D;0] også innføres i Appendix A i Rognes [2].

Vi gir så den følgende definisjon:

Definisjon 1: (a) $U = Mg(x: Ut(x))$
(b) $K^* = Mg(\langle\langle x,y\rangle,z\rangle: Kn(z,x,y))$
(c) $neg^* = Mg(\langle x,y\rangle: neg(y,x))$

Man ser fra denne definisjonen at U er mengden av utsagn, K* operasjonen som til ethvert par av utsagn <x,y> tilordner det utsagnet som er konjunksjonen av utsagnene x og y, og at neg* er den operajonen som til ethvert utsagn tilordner negasjonen av dette utsagn.

Det nevnes videre at ZFC;u(L;e[D;0]) er den første-ordens teorien i L;e[D;0] hvis ikke-logiske aksiomer er nøyaktig ZFC;u-aksiomene i L;e[D;0]. Denne teorien ble utførlig beskrevet i Rognes [1] og i Appendix B i Rognes [2]. En nærmere redegjørelse for teorien ZFC;u skulle derfor være unødvendig på dette punkt.

I Appendix A i Rognes [2] ble også formlene B1 – B11 i L;e[D;0] spesifisert. Disse formlene inneholder konstruksjonene i D;0. Den første-ordens teorien man får når ZFC;u(L;e[D;0]) utvides med B1 – B11 som nye ikke-logiske aksiomer ble i Rognes [2], Appendix A, betegnet med "U;1+". Vi viste også i dette tillegget hvordan teorien kan vises å være ekvivalent med utsagnsteorien T;1. Man kan i denne forbindelse konsultere Rognes [2].

La oss nå nevne at vi i forbindelse med teorien U;1+ definerer relasjonen "x impliserer y", i symboler "Imp(x,y)" ved:

Definisjon 2: $Imp(x,y) \leftrightarrow K^*(x,y) = x$

Dessuten bemerker vi at det kontradiktoriske utsagn, k*, og det nødvendige utsagn (også kalt det tautologiske utagn), t*, er definert ved:

Definisjon 3: (a) $k^* = (iy)(y \hat{e} U \ \& \ (Ax)(x \hat{e} U \rightarrow y = K^*(x, neg^*(x))))$
(b) $t^* = neg^*(k^*)$

Tilslutt nevnes det uttrykkene "x er et maksimalt konsistent utsagn", i symboler "Max;u(x)", "Klassen av maksimalt konsistente utsagn", "I;+" og relasjonenen "w er et maksimalt konsistent utsagn som impliserer utsagnet y", "True;+(w,y)" er definert slik:

Definisjon 4: (a) $Max;u(x) \leftrightarrow (x \hat{e} U \ \& \ x \neq k^* \ \& \ (Ay)(y \hat{e} U \rightarrow (Imp(y,x) \leftrightarrow (y = x \vee y = k^*))))$
(b) $I;+ = Mg(x: Max;u(x))$
(c) $True;+(w,y) \leftrightarrow (Max;u(w) \ \& \ y \hat{e} U \ \& \ Imp(w,y))$

Vi har nå gjort rede for de begreper og det bakgrunnsstoff som er nødvendig for forståelsen av det som følger.

§3 Detaljert redegjørelse for den alternative aksiomatiseringen av E;3

Vi skal nå gjøre rede for vår alternative aksiomatisering av E;3. Vi utvider konstruksjonsmengden D;0 som ble definert ovenfor med to nye ikke-logiske konstruksjoner nemlig:

(4) "x er en egenskap". Dette uttrykket forkortes med "E(x)"
(5) "x er utsagnet at y har egenskapen z". I forbindelse med denne konstruksjonen benyttes forkortelsen "b(x,y,z)"

Mengden av konstruksjoner som inneholder konstruksjonene (1) – (3) i §2 samt (4) og (5) ovenfor kaller vi for "D;1". Det språket som nå betraktes er L;e[D;1]. Siden Fm(L;e[D;0]) Inkl Fm(L;e[D;1]) har man at alle de logiske aksiomene i L;e[D;0], ZFC;u - aksiomene i L;e[D;0], og formlene B1 – B11 er formler i L;e[D;1]. Vi vil betrakte enkelte formler i

L;e[D;1] som inneholder predikatene (4) og (5). For å kunne uttrykke disse formlene konsist innføres den følgende definisjon:

Definisjon 5: $u^*(y,z) = (ix)(b(x,y,z))$

Mao. er $u^*(y,z)$ det utsagnet som sier at y har egenskapen z.

Vi vil nå formulere de nye ikke-logiske aksiomene i L;e[D;1]. Først betrakter vi den følgende setning som ganske enkelt sier at om x er utsagnet at y har egenskapen z så er x et utsagn og z en egenskap:

EE1 $b(x,y,z) \rightarrow Ut(x) \,\&\, E(z)$

Det er vanskelig å tenke seg noen avgjørende innvendinger mot denne setningen. Dernest betrakter vi den følgende setning som sier at hvis z er en vilkårlig egenskap og y et vilkårlig objekt så finnes det nøyaktig ett utsagn som er utsagnet at y har egenkapen z:

EE2 $E(z) \rightarrow (E!x)(b(x,y,z))$

Også denne setningen synes å være av en nokså ukontroversiell karakter. Men det kan selvfølgelig diskuteres om den er direkte innlysende.

De neste tre aksiomene er muligens mindre opplagte, men sett i en litt større sammenheng er det rimelig å tro at de skulle kunne aksepteres.

Den første setningen sier at hvis y;1 og y;2 er to vilkårlige egenskaper og det dessuten er tilfelle for ethvert objekt x at utsagnet at x har egenskapen y;1 er identisk med utsagnet at x har egenskapen y;2 så er de to egenskapene y;1 og y;2 identiske. Setningen kan formaliseres slik:

EE3 $E(y;1) \,\&E(y;2) \,\&\, (Ax)(u^*(x,y;1) = u^*(x,y;2). \rightarrow y;1=y;2$

I den egenskapsteorien som vi nå er iferd med å gi omrisset av spiller dette aksiomet den samme rolle for egenskapene som ekstensjonalitetsaksiomet i mengdelæren spiller når det gjelder spørsmålet om identiteten til mengder. EE3 angir, som man ser, et identitetskriterium for egenskaper.

Det neste aksiomet er noe mer komplisert og er kanskje heller ikke så opplagt som de andre aksiomene som har blitt nevnt så langt. Men tillater vi oss å snakke uformelt om ekstensjonen til en egenskap i en mulig verden reflekterer den følgende setning den påstand at unionen av ekstensjonene til en egenskap i alle mulige verdener er en mengde. Dette er forøvrig, gitt våre mengdeteoretiske aksiomer, ekvivalent med den antagelse at for enhver mulig verden w er ekstensjonen til en egenskap y i denne verdenen w en mengde.

Setningen sier at hvis y er en vilkårlig egenskap finnes det alltid en mengde x som er slik at noe er et element i denne mengden x hvis og bare hvis utsagnet at dette element har egenskapen y er forskjellig fra det kontradiktoriske utsagn:

EE4 $E(y) \rightarrow (Ex)(M(x) \,\&\, (Az)(z\hat{e}x \leftrightarrow u^*(z,y) \neq k^*))$

Det neste aksiomet sier at dersom x er en vilkårlig ikke-tom mengde, a en ikke-tom mengde av utsagn og f er en avbildning av mengden x på mengden a, så gjelder følgende: Det finnes en egenskap y som oppfyller disse to kravene:

(i) Er z et vilkårlig objekt i x er f(z) identisk med utsagnet at z har

egenskapen y.

(ii) Er z ikke et medlem av x har man at utsagnet at z har egenskapen y er identisk med det kontradiktoriske utsagn.

Formelt sett kan aksiomet formuleres slik:

EE2 $(M(x) \& M(a) \& x,a\neq ø \& a \text{ Inkl } U \& f: x \text{ –på–>} a) \rightarrow (Ey)(E(y) \& (Az)(zêx \rightarrow u^*(z,y) = f(z)) \& (Az)(\neg(zêx \rightarrow u^*(z,y)= k^*))$

Dette avslutter oversikten over nye aksiomer i L;e[D;1].

Man kan nå gi en presis definisjon av teorien E;3*: E;3* er den første-ordens teorien i L;e[D;1] hvis ikke-logiske aksiomer er alle ZFC;u-aksiomene i L;e[D;1], aksiomene B1 – B11 beskrevet i Appendix A i Rognes [2], samt aksiomene EE1 – EE5 som er angitt ovenfor. Det er altså denne teorien som det her påstås at er ekvivalent med E;3.

§3 Bevis for at E3* er ekvivalent med E3.

Vi vil nå vise på hvilken måte E;3* kan sies å være ekvivalent med E;3. Når vi sier at disse to teoriene er ekvivalente mener vi med dette intet annet enn at teoriene oppfyller følgende to krav:

(i) Det finnes en intepretasjon av L;e[D;1] inn i L;e[Δ] som er normal med hensyn på de logiske og mengdeteoretiske konstruksjonene og som avbilder alle E;3*–teoremer på E;3–teoremer.

(ii) Det finnes en intepretasjon av L;e[Δ] inn i L;e[D;1] som er normal med hensyn på de logiske og mengdeteoretiske konstruksjonene og som avbilder alle E;3–teoremer på teoremer i teorien E;3*.

Når det gjelder hva som menes med en intepretasjon av et første-ordens språk L;1 inn i et annet første-ordens språk L;2 og som er normal med hensyn på de logiske og mengdeteoretiske konstruksjonene henviser vi til de definisjoner som er gitt i Rognes [2], §4.1, i det vi forutsetter at leseren er fortrolig med dette arbeid.

For å vise at E;3* er ekvivalent med E;3 i den betydning som er antydet ovenfor vil det altså være tilstrekkelig å spesifisere to slike intepretasjoner, la oss kalle dem X;1 og X;2 som oppfyller henholdsvis det første og det andre av de to kravene som ble nevnt rett ovenfor. Vi vil først se på en slik intepretasjon av L;e[D;1] inn i L;e[Δ].

§3.1 Intepretasjonen X1

Vi betrakter intepretasjonen X;1 av L;e[D;1] inn i L;e[Δ] som er entydig fiksert ved de følgende krav:

(a) Intepretasjonen er normal med hensyn på de logiske og mengdeteoretiske konstruksjonene.

(b) Intepretasjonen oppfyller de følgende betingelser:

(i) $X;1(Kn(x,y,z)) = (x,y,zêU \& x= K(y,z))$

(ii) $X;1(neg(x,y)) = (x,yêU \& x= Neg(y))$

(iii) $X;1(Ut(x)) = (Ut(x))$

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

(iv) X:1(E(x)) = (At;1(x))
(v) X;1(b(x,y,z)) = (At;1(z) & xêU & x= u(z,y))

Dette avslutter definisjonen av X;1. Det bemerkes at K og Neg er henholdsvis den vanlige konjunksjonsoperatoren og negasjonsoperatoren slik disse tidligere er blitt definert i tilknytning til teorien E;3. u(z,y) er definert som i Rognes [3], nemlig ved:

u(z,y) = s;-1(Mg(w: wêI & H(y,z,w)))

Det man nå kan vise er at X;1 overfører alle teoremene i E;3* til teoremer i E;3. Dette formuleres som et formellt, "offisielt", resultat slik:

Teorem 1 La X;1 være definert som ovenfor. Da gjelder:
X;1 ‘‘(Th(E;3*)) Inkl Th(E;3)

Man kan oppfatte denne satsen som et slags "gyldighets-teorem" for E;3*. Tenker man seg at teoremene i E;3 er sanne setninger i L;e[Δ] og forestiller man seg at X;1 – noe som kanskje ikke virker helt søkt – representerer den intenderte, eller naturlige, intepretasjon av L;e[D;1] så kan teoremet sies å innebære at alle teoremene i E;3* er sanne under den "naturlige" intepretasjonen av L;e[D;1].

I alle tilfelle følger fra Teorem 1 at E;3* er konsistent om E;3 er det. Siden den sistnevnte teori er konsistent relativt til ZFC;u(L;e) (Jmf. Teorem 44 i Rognes [3]) følger det at også E;3* er konsistent relativt til ZFC;u(L;e).

Teorem 1 bevises ved induksjon på mengden av teoremer i E;3*. Man må altså vise at X;1 avbilder alle aksiomene i E;3* – de ikke-logiske, såvel som de logiske – på teoremer i E;3. Dessuten må man vise at hvis P, P–>Q êFm(L;e[D;1]) og x er et variabletegn i L;e[D;1] så har man at X;1(Q), X;1((Ax)P) êTh(E;3) om X;1(P) og X;1(P–>Q) er med i Th(E;3). Beviset blir som man skjønner svært langt om det skal gjennomføres helt detaljert. Siden det i tillegg er av en helt rutinemessig karakter finner vi det unødvendig å gi det her.

§3.2 Intepretasjonen X2

Vi vil nå presentere en intepretasjon X;2 av L;e[Δ] inn i L;e[D;1]:

X;2 er definert som den intepretasjonen av L;e[Δ] inn i L;e[D;1]: som er entydig bestemt ved de følgende krav:

(a) Intepretasjonen er normal med hensyn på de logiske og mengdeteoretiske konstruksjonene.
(b) Intepretasjonen oppfyller de følgende betingelser:
(i) X;2(MV(x)) = (xêI;+)
(ii) X;2(Ut(x)) = (Ut(x))
(iii) X;2(True(w,x)) = (True;+(w,x))
(iv) X;2(MI(x)) = (x=x)
(v) X:2(H(x,y,w)) = (wêI+ & E(y) & True;+(w,u*(x,y)))
(vi) X;2(At;n(x)) = ([nêN & n>1 & E(x) &
(Ey)(M(y) & (Az)(Aw)(wêI;+ & (Ev)(b(v,z,x) &

Imp(w,v)). –> zêy^n))] v [n=1 & E(x)])

Dette avslutter definisjonen.

I tilknytning til denne definisjonen vil vi bemerke enkelte ting. I teorien E;3* er det meningen at elementene i I;+, dvs. de maksimalt konsistente utsagn skal representere de mulige verdenene. Dette er gjenspeilet i kravet (i) i definisjonen. Videre er det naturlig å si, om w er et maksimalt konsistent utsagn som representerer en mulig verden og y er et vilkårlig utsagn, at y er sann i w hvis og bare hvis w impliserer y. Dette er avspeilet i definisjonens krav (iii). Det er videre naturlig å identifisere det som omtales som utsagn i E;3 med det som omtales som utsagn i E;3*. Dette er derfor motivet bak klausul (ii) i definisjonen ovenfor. Punkt (iv) skulle ikke kreve ytterligere kommentarer.

La oss se nærmere på (v). Anta objektet x har egenskapen y i verdenen w. Hva innebærer dette? Det virker naturlig, ja nesten litt intetsigende, å si at det innebærer at utsagnet at x har egenskapen y, ie. u*(x,y) er sant i w. Identifiserer vi mulige verdener med maksimalt konsistente utsagn, slik vi nå gjør, og sier at utsagnet u*(x,y) da er sant i verdenen w hvis og bare hvis w impliserer y så har man altså at x har egenskapen y i verdenen w hvis og bare hvis w impliserer u*(x,y), dvs. hvis og bare hvis w Imp u*(x,y). Dette er i sin tur ekvivalent med True;+(w,u*(x,y)). Dette er derfor bakgrunnen for den formuleringen vi har gitt av klausul (v) i definisjonen.

Man ser fra dette at ektensjonen til en egenskap y i verdenen w i E;3* kan representeres ved Mg(x: True;+(w,u*(x,y))). En egenskap e sies å være n-ær om det gjelder for hver mulig verden w at elementene i ekstensjonen til egenskapen e i verdenen w er n-tupler der de enkelte ledd er hentet fra en mengde y. Dette innebærer at (Ey)(M(y) & (Aw)(wêI;+ –> Mg(x: True;+(w,u*(x,e))) inkl y^n). Siden True;+(w,u*(x,e)) er ekvivalent med (Ev)(b(v,x,e) & Imp(w,v)) viser dette hvorfor vi har formulert klausul (vi) i definisjonen slik vi har gjort det.

Man kan nå vise, og det er ikke helt trivielt, at X;2 avbilder alle teoremene i E;3 på teoremer i E;3*. Dette resultat kan formelt uttrykkes slik:

Teorem 2 La X;2 være definert som ovenfor. Da gjelder:

X;2 ‘‘(Th(E;3)) Inkl Th(E;3*)

Beviset føres ved induksjon på mengden av teoremer i E;3 og blir om det skal gjennomføres helt detaljert svært langt. Det utelates derfor her.

§3.3 Noen relaterte resultater. Definisjonell utvidelse av E3*

Vi vil studere et annet teorem i forbindelse med Teorem 2 som innholdsmessig er svært nært forbundet med dette.

La oss først utvide L;e[D;1] med alle de konstruksjonene som er med i Δ–D;1. Det nye språket kaller vi L;e[D;1U(Δ–D;1)] eller kortere for "L+". Man har selvfølgelig at Fm(L;e[Δ]) Inkl Fm(L+). Vi betrakter så den første-ordens teorien i L+ hvis aksiomer er de logiske aksiomene i L+, og hvis ikke-logiske aksiomer er ZFC;u-aksiomene i L+, B1 – B12, samt EE1 – EE5. Slutningsreglene er modus ponens og universell generalisering. I tillegg inneholder teorien de følgende "definisjonelle" aksiomer som ikke-logiske aksiomer:

(D1) MV(x) <–> xêI;+

(D2) True(w,x) <–> True;+(w,x)

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

(D3) H(x,y,w) <–> (wêI+ & E(y) & True;+(w,u*(x,y)))
(D4) At;n(x) <–> ([nêN & n>1 & E(x) &
(Ey)(M(y) & (Az)(Aw)(wêI;+ & (Ev)(b(v,z,x) &
Imp(w,v)). –> zêy^n))] v [n=1 & E(x)])

La oss kalle den nye teorien for E;3*+. Man kan da bevise:

Teorem 3 Th(E;3) Inkl Th(E;3*+)

Fra definisjonen av E;3*+ fremgår det at denne teori åpenbart er en utvidelse av E;3.

Enkelte bemerkninger er på sin plass i forbindelse med Teorem 3. For det første bemerkes det at Teorem 3 i en viss forstand er ekvivalent med Teorem 2. La oss se på hva dette kan innebære. Det er da nødvendig å nevne enda en sats, nemlig den følgende:

Teorem 4 (AP)(PêFm(L;e[Δ] –> (X;2(P) êTh(E;3*) <–> PêTh(E;3*+))

Her er "X;2", "E;3*", "E;3*+" og "L;e[Δ] " definert som i tidligere avsnitt.

Som man ser sier denne setningen at hvis P er en vilkårlig formel i L;e(Δ) så er P et teorem i E;3*+ hvis og bare hvis X;2(P), dvs. den formlen som transformasjonen X;2 tilordner P, er et teorem i E;3*. Teorem 4 skal vi ikke gi noe bevis for her. Det nevnes bare at E;3*+ er en definisjonell utvidelse av E;3* og at satsen ovenfor derfor er et korollar til en mer generell sats om definisjonelle utvidelser av denne art i forbindelse med første-ordens språk. Denne mer generelle sats er bevist i Shoenfield [1], §4.6, side 57 - 61 og leseren skulle ikke ha noen vanskeligheter med å se at Teorem 4 følger fra denne setningen i Shoenfields bok.

Poenget med å nevne Teorem 4 er dette:

(a) Teorem 3 følger fra Teorem 2 og Teorem 4

Det er ganske lett å vise riktigheten av påstand (a): Anta Teorem 4 og Teorem 2 holder. Vi skal da vise (+) Th(E;3) Inkl Th(E;3*+). Anta derfor for vilkårlig formel P at (1) PêTh(E;3). Da må man i lys av definisjonen av E;3 ha at PêFm(L;e[Δ]). Fra dette og Teorem (4) følger i så fall at

(2) X;2(P)êTh(E;3*) <–> PêTh(E;3*+)

Men fra (1) følger X;2(P)êX;2‘‘Th(E;3*) og fra dette og Teorem 2 følger (4) X;2(P)êTh(E;3*). Fra (4) og (3) følger i sin tur at (5) PêTh(E;3*+). Men P var en vilkårlig formel der man hadde at (1) holdt. Dette viser at (+) holder.

(b) Teorem 2 følger fra Teorem 3 og Teorem 4

Også her er beviset en rent rutinepreget affære: Anta Teorem 3 og Teorem 4 holder. Vi må da vise: (+) X;2‘‘Th(E;3) Inkl Th(E;3*) Anta derfor for vilkårlig P at (1) PêX;2‘‘Th(E;3). Da finnes Q der vi har at (2) QêTh(E;3) og (3) P= X;2(Q). Fra (2) og definisjonen av E;3 følger at (4) QêFm(L;e[Δ]). Fra (2) og Teorem 3 følger som man ser (5) QêTh(E;3*+). Fra (3), (4), (5) og Teorem 4 følger PêTh(E;3*). Men P var en vilkårlig formel der (1) holdt. Det følger at (+) må holde.

Fra disse to resultatene fremgår det at Teorem 2 og Teorem 3 kan utledes fra hverandre i nærvær av Teorem 4.

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

§3.4 Ytterligere noen relaterte resultater. Om en definisjonell utvidelse av E3

Resultater av den typen som vi nevnte i forrige paragraf i forbindelse med X;2 kan vi også nevne i forbindelse med den intepretasjonen som ble definert i §3.1.

La oss se på dette: Vi har tidligere definert konstruksjonsmengdene D;1 og Δ. Vi utvider nå først L;e[Δ] med konstruksjonene i D;1–Δ slik at vi får språket L;e[ΔU(D;1–Δ]. Man ser at dette er det samme språket som det vi beskrev i §3.3, ie. L+. Vi betrakter så den første-ordens teorien i L+ hvis logiske aksiomer er de logiske aksiomene i L+ og hvis ikke-logiske aksiomer er ZFC;u-aksiomene i L+, U1 – U4 samt de egenskapsteoretiske aksiomene E1 – E7 som ble angitt i Rognes [3] og hvor vi også tar med de følgende definisjonelle aksiomer:

D'1 Kn(x,y,z) <–> (x,y,zêU & x=K(x,y))
D'2 neg(x,y) <–> (x,yêU & x= Neg(y))
D'3 E(x) <–> At;1(x)
D'4 b(x,y,z) <–> (At;1(z) & xêU & x= u(z,y))

La oss kalle denne nye teorien for E;3+. Da kan man bevise det følgende teorem:

Teorem 5 Th(E;3*) Inkl Th(E;3+)

Videre kan man på basis av det teorem om definisjonelle utvidelser som er angitt i Shoenfields bok, og som vi henviste til tidligere, konkludere med at det følgende holder:

Teorem 6 (Ap)(PêFm(L;e[D;1]) –> (X;1(P)êTh(E;3) <–> PêTh(E;3+))

På en måte som blir helt analog med den som det ble gjort rede for i forrige paragraf kan man nå vise i nærvær av Teorem 6 (som nå ansees for etablert) er Teorem 1 ekvivalent med Teorem 5. Vi nevnte forøvrig ovenfor at beviset for Teorem 1 er rutinemessig, men langt. Gitt dette bevis vil vi også ha et bevis for Teorem 5 gitt et bevis for Teorem 6. Man kan imidlertid også gå den andre veien. I stedet for møysommelig å bevise Teorem 1 kan man gjennomføre detaljert beviset for Teorem 5, og dernest utlede Teorem 1 fra dette resultat ved hjelp av Teorem 6.

Vi har nå fullført det første av våre projekter, nemlig å formulere en alternativ aksiomatisering av E;3 og vise hvordan denne og E;3 kan bevises å være ekvivalente. I §1 antydet vi imidlertid to sidespørsmål som vi i noen grad vil ta opp til drøfting. Vi vil nå gjøre dette.

§4 Om begrunnelsesproblematikken i forbindelse med E3

Hvorvidt det er mulig å gi noen dypere begrunnelse for E;3 vil selvfølgelig avhenge av hva man mener med "en dypere begrunnelse". Siden dette uttrykket er noe uklart er det derfor naturlig å forsøke å avklare noe hva man kan legge i uttrykket "begrunnelse" i denne sammenheng.

Anta L er et første-ordens språk av den typen vi arbeider med her og at P er en lukket formel i L. Med *en begrunnelse for P i L* forstås da et ordnet par <Δ,b> der Δ er en endelig mengde med lukkede formler i L og b er et bevis for P i L utfra formlene i mengden Δ. Man erindrer at vi med et bevis for P i L utfra formlene i mengden Δ forstår en formelsekvens

Q;1,...,Q;n av endelig lengde (n≥1) hvor Q;n=P og hvor hver formel enten er et logisk aksiom i L, eller er en formel i Δ, eller hvor formelen er sluttet fra tidligere formler i rekken ved hjelp av modus ponens eller universell generalisering. Er <Δ,b> en begrunnelse i denne forstand for P kaller vi Δ for premissene i begrunnelsen og P for konklusjonen i den.

Dette begrunnelsesbegrep er som man raskt innser svært vidt og omfattende. Ved å stille ytterligere krav til komponentene Δ og b i en begrunnelse <Δ,b> for P i L kan man utskille andre og mindre omfattende delklasser av begrunnelser. Man kan f. eks. kreve (a) at konklusjonen i en begrunnelse <Δ,b> ikke skal være blandt premissene. Videre kan man kreve (b) at den kondisjonalsetningen som har konjunksjonen av premissene i begrunnelsen som antesedent og konklusjonen som konsekvent ikke skal være en direkte innlysende logisk sannhet i L. Videre kunne man tenke seg å kreve (c) at premissene i begrunnelsen skal være sanne og (d) at premissene i begrunnelsen skal være allment akseptable for enhver rasjonell person som oppfatter hva de uttrykker utfra den naturlige tolkningen av L.

La oss kalle en begrunnelse i L som oppfyller kravene (a) – (d) for *en ikke-triviell begrunnelse med sanne og akseptable premisser*.

Det man nå kan spørre om er om det er mulig å gi en ikke-triviell begrunnelse med sanne og akseptable premisser i denne forstand for de utsagnsteoretiske aksiomene U1 – U4 og egenskapsteoretiske aksiomene, E1 – E7 i teorien E3.

Når det gjelder dette spørsmål er vi bare i stand til å gi et svar med svært mange forbehold. La oss kalle den følgende påstand for T:

(T) De ikke-logiske aksiomene i E;3*+ er setninger i L+ som oppfyller kravene (c) og (d) ovenfor, dvs. de er setninger som er sanne i L+ utfra den naturlige tolkning og videre setninger som er allment akseptable for enhver rasjonell person som oppfatter hva de uttrykker utfra den naturlige tolkning av L+

Denne påstanden kan i høyeste grad diskuteres. Men gitt denne påstanden kan vårt kvalifiserte svar på spørsmålet ovenfor uttrykkes ved det følgende teorem:

Teorem 7 Hvis tesen T er sann finnes det for hvert av de ikke-logiske aksiomene E1 – E7 og U1 – U4 en ikke-triviell begrunnelse i L+ med sanne og akseptable premisser.

Denne satsen inneholder endel uttrykk som ikke er presist definert. Man kan derfor ikke forvente et helt eksakt og rigorøst bevis for den. Vi gir derfor bare et mer uformelt argument.

Anta (1) at T er sann. Fra Teorem 3 har vi at (2) Th(E;3) Inkl Th(E;3*+) og siden E1 – E7, U1 – U4 er aksiomer i E;3 følger det at de er teoremer i E;3 og derfor i lys av (2) at de er teoremer i E;3*+. Fra det siste følger om S er et vilkårlig av de nevnte aksiomer at det finnes et bevis for S, la oss kalle det b;S ut fra aksiomene i E;3*+. La Δ;S være alle de formler i b;S som er aksiomer i E;3*+ av ikke-logisk art. Da vil <Δ;S,b;S> være en begrunnelse for S i den svake betydningen ovenfor. Siden S ikke inngår blandt de ikke-logiske aksiomene i E;3*+, en rask inspeksjon av aksiomene viser dette, oppfyller <Δ;s,b;S> kravet (a) som ble nevnt ovenfor. Siden kondisjonalen med konjunksjonen av setningene i Δ;S og S som henholdsvis antesedent og konsekvent ikke er en direkte innlysende logisk sannhet følger videre at <Δ;S,b;s> oppfyller kravet (b). Siden Δ;S er inkludert blandt de ikke-logiske aksiomene i E;3*+ har man i lys av T og definisjonen av begrunnelse at <Δ;S,b;S> også oppfyller kravene (c) og (d). Derfor må <Δ;S,b;S> være en ikke-triviell begrunnelse med sanne og akseptable premisser. **Q.E.D.**

Som man ser er Teorem 7 en temmelig triviell og overfladisk sats gitt de definisjonene som er innført og de teoremene som tidligere har blitt formulert. Hvis man nå med en dypere

begrunnelse for E;3 nettopp forstår et system av ikke-trivielle begrunnelser med sanne og akseptable premisser for de utsagnsteoretiske og egenskapsteoretiske aksiomene i E;3, følger fra Teorem 7 at en slik dypere begrunnelse finnes om T er riktig. Spørsmålet blir da om man kan akseptere T.

Nå virker det ikke helt absurd å hevde at alle de ikke-logiske aksiomene i E;3*+ er sanne. Dette innebærer spesielt at man hevder at alle ZFC;u-aksiomene i L+ er sanne. Men dette behøver ikke være galt selvom man kan regne med protester fra motstandere av Zermelo-Fraenkel mengdelære og f.eks. Cantors lære om høyere uendeligheter. Vi har heller ikke funnet noen enkle "knock-down" argumenter mot aksiomene B1 – B11, EE1 – EE5. Det er derfor i alle fall mulig at disse er sanne. I følge T er også er også alle disse setningene akseptable for enhver person som setter seg inn i hva de sier og oppfatter hva de uttrykker utfra den naturlige tolkningen av L+. Selvom dette er en mer dristig påstand er det vel heller ikke her slik at det er direkte opplagt at dette ikke er tilfelle. Fremføres som et mulig moteksempel en kompetent person som f. eks. ved gjennomlesningen av EE5 finner dette aksiom uakseptabelt behøver ikke dette være noe avgjørende motbevis. Man må forsikre seg om at vedkommende er rasjonell og også har oppfattet hva denne setningen sier utfra den naturlige intepretasjonen av det språket som den er formulert i. Nærmere undersøkelser kunne vise at disse to betingelsene ikke er oppfyllt.

Vi tar ikke her noe definitivt stilling til tesen T, men lar spørsmålet om riktigheten av denne setning være åpent for videre diskusjon.

Hvis man, og det er kanskje viktigere, med en dypere begrunnelse for E;3 mener en en ikke-triviell begrunnelse med sanne og akseptable premisser for de viktigste hovedaksiomene og hvor premissene i tillegg skal oppfylle det krav at de skal være sikrere og mer pålitelige enn konklusjonen er det høyest tvilsom, om ikke direkte galt, å påstå at de bevis vi kan gi for f. eks. E1 – E7 i E;3*+ oppfyller dette krav. Aksiomene i E;3*+ kan vel neppe sies å være sikrere enn dem i E;3. Det er derfor tvilsomt om reduksjonen X;2 av E;3 til E;3* er spesielt betydningsfull fra en erkjennelsesteoretisk synsvinkel om et man legger til grunn et slikt begrunnelsesbegrep. Dette avslutter vår drøftelse av det første sidespørsmålet som ble nevnt i §1.

La oss så gå over til det andre og siste spørsmålet som der ble nevnt, nemlig om det er mulig å definere predikatet "x er en mulig verden" ved hjelp av andre uttrykk og så på grunnlag av rimelige aksiomer om disse utlede de satser vi finner at bør gjelde for mulige verdener.

Angående dette spørsmål synes svaret med visse forbehold å være bekreftende i lys av de overlegningene som har blitt presentert ovenfor. I språket L;e[D;1] forekommer ikke predikatet "MV(x)" ("x er en mulig verden") som primitivt, ikke-logisk predikat. Man ser imidlertid at om L;e[D;1] utvides med definisjonene gitt i §3.3, nemlig D1 – D4, og vi antar at aksiomene i E;3*+ holder, så kan vi utlede alt som inngår i teorien E;3, dvs. man kan utlede alle de setninger som er teoremer i E;3. Det er derfor strengt tatt ikke nødvendig å innføre begrepet mulig verden som et primitivt udefinert begrep. Man kan, som vist i §3.3, definere de mulige verdenene som maksimalt konsistente utsagn i det man da i sin tur definerer hva som menes med "maksimalt konsistent utsagn" ved hjelp av de primitive ikke-logiske predikatene i L;e[D;1] slik det ble vist i §2.

Man kunne kanskje kalle utsagn og egenskaper i en viss forstand for ikke-globale, ikke-holistiske entiteter, mens derimot mulige verdener kunne karakteriseres som holistiske, globale entiteter. Man kunne da si at de holistiske, globale entitetene som de mulige verdenene representerer kan oppfattes som en art mengdeteoretiske konstruksjoner av mindre omfattende, ikke-globale entiteter, nemlig utsagn. Ved at utsagn settes sammen til mer

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

omfattende helheter, nemlig maksimalt konsistente mengder, "får" man altså de mulige verdener.

Imidlertid kan man ikke uten videre si at D1 i §3.3, dvs. det at man identifiserer mulige verdener med maksimalt konsistente utsagn, innebærer at man definerer begrepet mulig verden ved hjelp av begreper som er mer velkjente, klarere og kunnskapsteoretisk sett mer grunnleggende. Det utsagnsbegrep og de primitive operasjoner over disse størrelsene som innføres i L;e[D;1], og som karakteriseres av teorien E;3*, kan ikke ubetinget sies å være mindre problematiske enn selve begrepet om mulige verdener. Likevel virker det ikke helt uberettiget å si at grunnbegrepene i E;3 er omgitt av noe mindre provoserende metafysiske og spekulative assosiasjoner enn de mulige verdenene, slik at noe tross alt kan være oppnådd ved å presentere den reduksjonen av E;3 som vi har nevnt.

§5 Avslutning.

Hovedformålet med dette arbeidet har egentlig ikke vært å vise at E;3 kan utledes fra en annen og mer fundamental teori. Derimot er det rimelig å si at man kan få en bedre forståelse av en teori om man får et dypere innblikk i hva teorien impliserer og hvilke andre teorier som impliserer den. Det er dette som har blitt oppnådd ved å vise at E;3* er ekvivalent med E;3 idet vi har vist at E;3's grunnsetninger og avledete setninger kan utledes fra dem i E;3* og omvendt. Desuten skulle det fremgå fra våre betraktniger at disse utledningene ikke er av en helt triviell karakter. Dette innebærer at vår teori E;3 har blitt belyst fra en annen synsvinkel og på en måte som i noen grad skulle kunne utdype ens forståelse av de grunnleggende begrepene i den.

****

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

Referanser

Referanser

Rognes [1], Rognes, Morten, *En oversikt over definisjoner av sentrale begreper i den klassiske predikatlogikk og mengdelære*, Maskinskrevet manuskript, 1985
Rognes [2], Rognes, Morten, *En teori om presise deskriptive utsagn*, Maskinskrevet manuskript, 1985
Rognes [3], Rognes, Morten, *Egenskaper. Del I.* , Maskinskrevet manuskript, 1986
Rognes [4], Rognes, Morten, *Egenskaper. Del II, Bevis for teoremer.*, Maskinskrevet manuskript, 1987
Rognes [5], Rognes, Morten, *Et sammendrag av en teori om egenskaper og presise deskriptive utsagn*, Maskinskrevet manuskript, 1985
Rognes [6], Rognes, Morten, *Egenskaper. Et sammendrag av to mulige teorier*, Maskinskrevet manuskript, 1985
Shoenfield [1], J. R. Shoenfield, "Mathematical Logic", Addison Wesley, 1967.

***

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

Copyright beskrivelse

Dette arbeidet er © Morten Rognes 2002. Det er fullstendig fritt i den forstand at man kan kopiere det for eget bruk og distribuere kopier til andre så lenge dette ikke er for salg eller økonomisk vinning. *Kopier må være av arbeidet i sin helhet og i sin opprinnelige form slik det er distribuert her, og må i tillegg inneholde denne copyright-beskrivelsen skrevet på norsk* .

Det er lov til å sitere fra dette arbeidet i egne skrifter etter de regler og standarder som er internasjonalt akseptert for sitering i vitenskapelige publikasjoner. Under ingen omstendigheter er det lov å sitere deler av dette arbeid, eller hele dette arbeid, på en slik måte at man utgir det for å være ens eget.

Henvisninger til dette arbeid bør inneholde de følgende data i en komma-separert liste: etternavnet til denne forfatteren, fornavnet til denne forfatteren, tittelen på arbeidet, årstallet det opprinnelig ble skrevet som angitt på tittelbladet, uttrykket "Upublisert", den fullstendige URL fra hvilket dette arbeidet ble lastet ned, dato og årstall for nedlasting, samt det versjonsnummeret som er angitt på tittelbladet. Eksempel:

> Rognes, Morten, "En oversikt over definisjoner av sentrale begreper i den klassiske predikatlogikk og mengdelære", 1985, Upublisert, http://www.uio.no/~mrognes/arbeider/mrog73a.sit.hqx, 4-4-2002, v1.00.